Prova scritta di Fisica 2 11.2.2020

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Un condensatore è costituito da una sottile superficie cilindrica metallica di diametro **D** e lunghezza **L** lungo il cui asse è posto un filo metallico di diametro **d**. Al condensatore è applicata la d.d.p. **ΔV**.

A) Scrivere l'espressione analitica del campo elettrico nello spazio interno al condensatore in funzione della densità lineare di carica λ presente sul filo interno e farne un grafico.

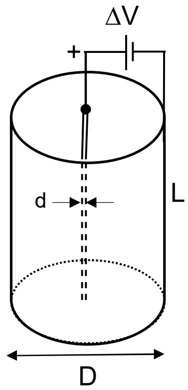
B) Calcolare il valore della densità lineare di carica λ.

C) Calcolare l'energia legata al campo elettrico presente nel condensatore.

Si assuma il condensatore nel vuoto e ideale, cioè senza campo elettrico disperso all'esterno del condensatore.

Nota: il disegno non è in scala.

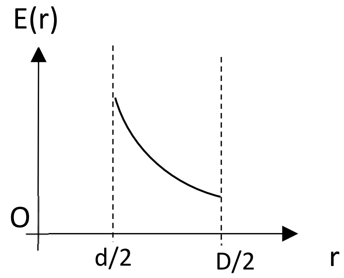
Dati: D = 2,4 cm ; d = 2 mm ; L = 1 m ; ΔV = 900 V



Soluzione

A) Il campo elettrico si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica lunga L e di raggio r con l'asse coincidente con l'asse del cilindro. Il campo elettrico è radiale.

$\phi(E) = \int \bar{E}(r) \cdot d\bar{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$ da cui: $E(r) \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$ e: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0}$ ∴



Il grafico di E(r) è una curva con andamento 1/r da d/2 a D/2.

B) Il valore di λ può essere calcolato scrivendo la d.d.p. esistente ai capi del condensatore in funzione del campo elettrico:

$$\Delta V = -\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \bar{E}(r) \cdot d\bar{r} = -\frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{d} \quad \text{da cui:} \quad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(^D/_d)} \Delta V = \frac{9 \cdot 10^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \ln 12} = \frac{1}{5}\, 10^{-7} = 20\ nC/m \ \therefore$$

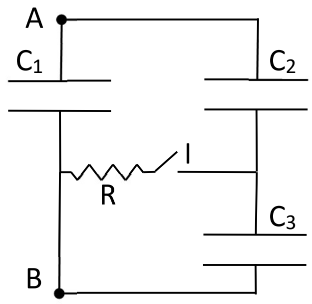
C) L'energia elettrostatica può essere calcolata dall'energia del condensatore:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \lambda \cdot L \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^{-6} J \ \therefore$$

Oppure integrando l'energia per unità di volume sul volume totale del condensatore:

$$\mathcal{E} = \int \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{d/2}^{D/2} \left(\frac{\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0}\right)^2 2\pi r \cdot L dr = \frac{L\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{d} = 1 \cdot 400 \cdot 10^{-18} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2{,}5 = 9 \cdot 10^{-6} J \ \therefore$$

Esercizio n.2 **[10 punti]**



Tra i punti A e B del circuito mostrato in figura, quando l'interruttore I è aperto, esiste una ddp V_i fornita da un generatore di f.e.m. Calcolare:

A) Il valore della capacità esistente fra i punti A e B con l'interruttore I aperto. All'istante $t=0^+$ il generatore viene scollegato e l'interruttore I viene chiuso.Calcolare nuovamente la capacità esistente fra i punti A e B dopo un tempo sufficientemente lungo, ovvero quando il sistema avrà raggiunto una condizione di equilibrio.

B) L'energia elettrostatica iniziale presente nel circuito.

C) La differenza (con il segno) fra l'energia elettrostatica finale e quella iniziale.

Dati: V_i=100 V ; C_1 = 1 μF ; $C_2 = C_3$ = 10 μF

Soluzione

A) La configurazione iniziale è equivalente (il ramo con la resistenza è come se non esistesse), fra i punti A e B, al parallelo della capacità C_1 con la serie di C_2 e C_3. Quindi la capacità inziale C_i sarà:

$$C_i = C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = C_1 + \frac{C_2}{2} = (1+5)10^{-6} = 6\ \mu F \quad \therefore$$

Nota: alcuni calcoli errati danno per caso il valore numerico corretto, ma è solo un caso che dipende dai valori numerici assegnati alle variabili.

Nella configurazione finale l'interruttore sarà chiuso, ai capi della resistenza ci sarà una d.d.p. nulla, quindi è come se il condensatore C_3 fosse sostituito da un corto circuito.

Fra i punti A e B si ha solo il parallelo delle due capacità C_1 e C_2 , quindi:

$$C_f = C_1 + C_2 = (1+10)10^{-6} = 11\ \mu F \quad \therefore$$

B) Inizialmente si ha: $\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\, C_i V_i^2 = \frac{1}{2}\, 6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 3\ \cdot 10^{-2}\, J = 30\ mJ \quad \therefore$

C) L'energia e.s. finale sarà: $\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\, C_f V_f^2$, la capacità finale è stata calcolata, va calcolata la d.d.p. finale fra i punti A e B.

Si può utilizzare il fatto che la carica totale del sistema deve rimanere costante (la carica elettrica è una grandezza che si conserva). Le armature con cariche opposte non vanno mai in contatto e non possono scambiarsi cariche elettriche, quindi la carica totale positiva e quella negativa saranno le stesse all'inizio ed alla fine. La carica Q (positiva) sarà quindi:

$Q_i = Q_f$; $C_i V_i = C_f V_f$ da cui: $V_f = \frac{C_i}{C_f} V_i = \frac{6}{11} V_i$; l'energia finale: $\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}\, 11 \cdot\ 10^{-6} \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^2 V_i^2 \cong 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ J

La differenza di energia $\Delta\mathcal{E}$ DEVE essere minore di zero perché nel processo di scarica si è persa una parrte dell'energia e.s. che è andata in calore attraverso R.

$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2} C_f V_f^2 - \frac{1}{2} C_i V_i^2 \cong 1{,}5 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2} \cong -1{,}5 \cdot 10^{-2}$ J oppure esplicitamente:

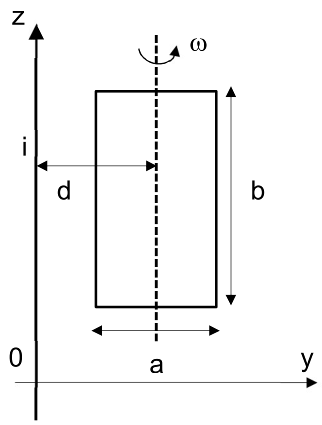
$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\left(11\ \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{6}{11}\right)^2 V_i^2\right) - 6\ \cdot 10^{-6} \cdot V_i^2\right] = \frac{1}{2} V_i^2 \left[\frac{36}{11} - 6\right] 10^{-6} \cong \frac{1}{2} 10^4\, [-3] 10^{-6} \cong -1{,}5\ \cdot 10^{-2}\, \mathrm{J} \quad \therefore$$

Anche:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} C_f V_f^2 - \frac{1}{2} C_i V_i^2 = \frac{1}{2}\left[C_f \cdot \left(\frac{C_i}{C_f} V_i\right)^2 - C_i V_i^2\right] = \frac{1}{2} V_i^2 C_i \left[\frac{C_i}{C_f} - 1\right] = \frac{1}{2} \cdot 10^4\ \cdot 6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{6}{11} - 1\right] \cong -1{,}5 \cdot 10^{-2}\, \mathrm{J}$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

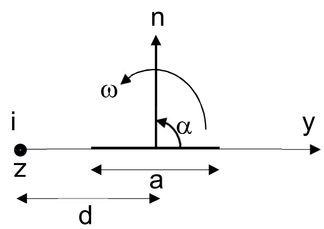
Si consideri un filo infinito percorso da una corrente **i**. Accanto al filo è posta una spira conduttrice rettangolare di lati **a** e **b** e resistenza **R** il cui asse maggiore si trova ad una distanza **d** dal filo e parallelo ad esso. La spira ruota intorno a questo asse con pulsazione costante ω. La spira è inizialmente posta come in figura, con il piano individuato dalla spira passante per il filo. Calcolare: A) L'espressione del flusso del campo magnetico attraverso la spira per una posizione generica della spira. B) L'espressione della f.e.m. indotta nella spira, sempre per una posizione generica. C) Il valore efficace (rms) della corrente elettrica indotta che circolerà nella spira.



Dati: i = 50 A ; a = 6 cm ; b = 10 cm ; d=$\frac{3}{2}$a ; R= 2 mΩ ; ω = $\sqrt{2}\cdot 10^2$ rad/s

Soluzione

A) Il campo B, a distanza y dal filo, è radiale con modulo $B(y) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{y}$. Il flusso infinitesimo di B attraverso una superficie rettangolare a distanza y dal filo, di larghezza dy ed altezza b è:



$d\phi = \overline{B}\cdot d\overline{S} = BdS\ \cos\alpha$; dove $\alpha = \omega t$ è l'angolo, variabile nel tempo, compreso fra la direzione $\hat{y}$ e la direzione della normale $\hat{n}$ all'elemento di superficie (vedi figura). Il flusso totale sarà quindi:

$$\phi(B,t) = \int d\phi = \int_{d-a/2}^{d+a/2} B\cdot b\ \cdot\cos\alpha\cdot dy = \frac{\mu_0}{2\pi} i\, b\cos\omega t\ \cdot\int_{d-a/2}^{d+a/2}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi} i\, b\cos\omega t\ \cdot\ln\frac{d+a/2}{d-a/2}\quad \therefore$$

B) le f.e.m indotta si ha dalla formula di Faraday-Neumann:

$$f_{e.m.}(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} i\, b\,\omega\ \cdot\ln\frac{d+a/2}{d-a/2}\ \sin\omega t\quad \therefore$$

C) Scrivendo la f.e.m. come: $f(t) = A\ \sin\omega t$; dove $A = \frac{\mu_0}{2\pi} i\, b\,\omega\ \cdot\ln\frac{d+a/2}{d-a/2}$, si ha che la corrente indotta i_i sarà:

$$i_i(t) = \frac{f}{R} = A\ \sin\omega t/R$$

Ed il suo valore efficace:

$$i_{eff} = i_{rms} = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{A}{R\sqrt{2}} \cong \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 50\cdot 0{,}1\cdot 10^2\cdot\sqrt{2}}{2\pi\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{2}}\,0{,}7 = 3{,}5\cdot 10^{-2}\ A = 35\ mA\quad \therefore$$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.
Valori che potrebbero essere utili: $\ln 20 \cong 3$; $\ln 12 \cong 2{,}5$; $\ln 8 \cong 2{,}1$; $\ln 4 \cong 1{,}4$; $\ln 2 \cong 0{,}7$